Ejercicios - Tema 3
Cálculo Diferencial

1.1 Derivadas

Ejercicio 1.1.1. Calcula las siguientes derivadas en los puntos que se indican:

i) $f'(0)$ siendo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ii) $f'(-1)$ siendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + \ln x^2 & \text{si } x > -1. \end{cases}$

iii) $f'(0)$ siendo $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ iv) $f'(0)$ siendo $f(x) = \begin{cases} 1/x^3 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

v) $f'(0)$ siendo $f(x) = \sqrt{|x|}$ vi) $f'(0)$ siendo $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Ejercicio 1.1.2. Sea $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ ax+b & \text{si } 2 < x \leq 4. \end{cases}$ Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x)$ sea derivable $\forall x \in (0,4)$.

Ejercicio 1.1.3. Halla la diferencial de las funciones siguiente en el punto $x = 0$ y utilízala para obtener una aproximación del valor que se indica.

i) $f(x) = e^{2x}$, para aproximar $\sqrt{e}$ ii) $f(x) = \tan x$, para aproximar $\tan \frac{\pi}{16}$

iii) $f(x) = \ln(1-x)^2$, para aproximar $\ln \frac{1}{4}$ iv) $f(x) = x + \cos x$, para aproximar $\cos \frac{\pi}{8}$

Ejercicio 1.1.4. Calcula la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

i) $f(x) = \operatorname{sen} x$, en $x = 0$ ii) $f(x) = \tan x$, en $x = 0$

iii) $f(x) = \ln(x)$, en $x = 1$ iv) $f(x) = e^x$, en $x = 0$

Ejercicio 1.1.5. Determina el ángulo que forman las curvas $y = x^2 - 1$ y $y = x^3 - x$ en los puntos de corte.

Ejercicio 1.1.6. Calcula el orden de contacto de las funciones $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = x^2 - x + 2$ en los puntos de corte.

Ejercicio 1.1.7. Encuentra el polinomio de grado dos más próximo a $f(x) = x^4$ en el punto $x = 0$.

Ejercicio 1.1.8. Dadas las funciones $f(x) = x^4 + 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = ax^2 + bx + c$, calcula a, b y c para que el orden de contacto en el punto $x = 0$, sea máximo. ¿Cuál es este orden?

Ejercicio 1.1.9. Halla la clase de las siguientes funciones en $\mathbb{R}$.

$$\text{i)}\quad f(x)=e^{2x} \qquad \text{ii)}\quad f(x)=\tan x \qquad \text{iii)}\quad f(x)=|x|^2$$
$$\text{iv)}\quad f(x)=\sqrt{|x|} \quad \text{v)}\quad f(x)=\frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{vi)}\quad f(x)=\sqrt[3]{(x^2+1)^7}$$

1.1.1 Regla de la cadena y función inversa

Ejercicio 1.1.10. Sean f, g y h funciones derivables en $\mathbb{R}$. Expresa en función de $f(a), g(a), h(a)$ y de sus derivadas $f'(a), g'(a), h'(a)$ las derivadas de las siguientes funciones en $x=a$.

$$\text{i)}\quad f(x^2) \qquad \text{ii)}\quad f(x+g(1)) \qquad \text{iii)}\quad f\left(\frac{g(x)+1}{g^2(x)+1}\right)$$
$$\text{iv)}\quad f^2(g(2x)) \quad \text{v)}\quad f(g(\sqrt{x+2})) \quad \text{vi)}\quad f(h(\log(g(3x-1))))$$

Ejercicio 1.1.11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones donde existan, utilizando el teorema de la derivada de la función inversa:

$$\text{i)}\quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) \quad \text{ii)}\quad \frac{d}{dx}(\arccos x) \quad \text{iii)}\quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arg\,cosh} x) \quad \text{iv)}\quad \frac{d}{dx}(arc\sec x)$$

1.2 Aplicaciones-Teoremas

Ejercicio 1.2.1. Analiza si es posible aplicar el teorema de Rolle a las funciones siguientes en los intervalos que se indican.

$$\text{i)}\quad f(x)=x \text{ en } [1,2] \qquad \text{ii)}\quad f(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x\le 0 \\ x^2 & \text{si } x>0. \end{cases} \text{ en } [-1,1]$$
$$\text{iii)}\quad \operatorname{sen}^2 x \text{ en } [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \qquad \text{iv)}\quad \sqrt[3]{x}-1 \text{ en } [-8,8]$$

Ejercicio 1.2.2. En los ejercicios siguientes, comprueba que la función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[a,b]$ que se indica. Halla todos los números c entre a y b que verifiquen $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

$$\text{i)}\quad f(x)=2x^2+1 \text{ en } [0,2] \quad \text{ii)}\quad f(x)=\sqrt{x} \text{ en } [1,4] \quad \text{iii)}\quad f(x)=x^4+2 \text{ en } [-1,2]$$

Ejercicio 1.2.3. Sea $f(x)=\tan x$. Recuérdese que $f(\pi)=f(0)=0$. Demuestra que no hay ningún número $c\in(0,\pi)$ tal que $f'(c)=0$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

Ejercicio 1.2.4. Demuestra que la ecuación $e^x=1+x$ tiene exactamente una solución real.

Ejercicio 1.2.5. Demuestra que para $x>0$ se cumple la desigualdad

$$\frac{x}{x+1}<\log(x+1)<x.$$

Ejercicio 1.2.6. Utiliza el teorema del valor medio con la función $f(x)=\sqrt{x+1}$ ($f(15)=4$), para demostrar que

$$\sqrt{x+1}<4+\frac{x-15}{8} \text{ si } x>15$$

1.2.1 Taylor

Ejercicio 1.2.7. Acota el error cometido al utilizar $P_{4,1}(x)$ en vez de $\ln x$ en $x = 1.5$ ($P_{4,1}(x)$ es el polinomio de Taylor de 4º grado en $x = 1$ correspondiente a $\ln x$).

Ejercicio 1.2.8. Calcula $\sqrt{e}$ a partir de $P_{3,0}(x)$ y acota el error cometido.

Ejercicio 1.2.9. Acota el error cometido al utiliza $P_{2,27}(x)$ en vez de $\sqrt[3]{x}$ al calcular $\sqrt[3]{30}$.

1.2.2 L'Hôpital

Ejercicio 1.2.10. Calcula los límites siguientes, aplicando la regla de L'Hopital.

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$ ii) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\operatorname{sen} x}}{x^3}, \quad (a > 0)$

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen} x) - \cos x}{x^4}$ vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$

vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cot x)^{\operatorname{sen} x}$ viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\right)^{1/x^2}$

1.3 Optimización

Ejercicio 1.3.1. Estudia las asíntotas y los extremos relativos de las siguientes funciones.

$$\text{i)} \quad f(x) = 3x + \frac{3x}{x-1} \qquad \text{ii)} \quad \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$$

Ejercicio 1.3.2. Un campo de atletismo se construye en forma de rectángulo de lado x, con semicírculos de radio r en ambos extremos. El campo estará rodeado por una pista de 400m. ¿Qué valores de x y r harán que el campo tenga la máxima área posible?

Ejercicio 1.3.3. Halla la altura y el radio del mayor cilindro circular recto que puede estar contenido en una esfera de radio $\sqrt{3}$.

Ejercicio 1.3.4. Determina las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos los de un área determinada A.

Ejercicio 1.3.5. Con una plancha cuadrada de lado L se quiere construir una caja rectangular abierta, cortando en cada esquina cuadrados de lado x. La altura de la caja coincide precisamente con x. ¿Cuál debe ser la altura dada para conseguir la máxima capacidad?

Ejercicio 1.3.6. El administrador de un zoo tiene que añadir un corral rectangular a una casa de animales utilizando una muesca rectangular de 5×10 metros que tiene la casa, como se muestra en la figura. Si tiene una cerca de $85m$ ¿Qué dimensiones tendrá el corral para que el área sea máxima? Si tiene problemas de terreno, ¿Qué dimensiones debe tener el corral para tener área mínima utilizando toda la cerca? No se utiliza cerca a lo largo de las paredes de la casa.